Работа 7. Решение краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений 2го порядка

Методы конечных разностей и сведения к двум задачам Коши

**Формулировка задачи.** Решить краевую задачу для ОДУ 2го порядка двумя методами – методом конечных разностей и методом сведения к двум задачам Коши.

**Метод конечных разностей**

**Этапы решения**

1. Составить СЛАУ с трехдиагональной матрицей
2. Решить СЛАУ методом прогонки

**Алгоритм метода**

**Тестовый пример**

**Метод сведения к двум задачам Коши**

**Этапы решения**

**Алгоритм метода**

**Тестовый пример**

**Модульная структура программы**

**Перечень контрольных тестов**

Было решено дифференциальное уравнение 2 порядка двумя методами: методом конечных разностей и методом сведения к двум задачам Коши. Количество точек менялось от 5 до 100. Заданная точность эпсилон менялась от 10 в -1 до 10 в -11 с шагом 0.1 с фиксированным количеством точек 50. Вносились изменения в начальные условия от 1% до 10 в -9 % с фиксированным количеством точек 50 и эпсилон 10 в -5. Возмущения вносились как в каждое из начальных условий отдельно, так и в оба вместе – в одну сторону и симметрично относительно рассматриваемого промежутка.

**Численный анализ решения задачи**

Фактическая погрешность 10^-4 достигается для метода конечных разностей при N=45, 10 в -3 при N = 15. Метод сведения к двум задачам коши оказывается на порядок точнее: точность 10 ^-4 достигается при N=15, 10 в -3 – N = 5, 10 в -5 при 40.

Для метода сведения к двум задачам Коши при фиксированном N=50 фактическая погрешность 10^-6 достигается сразу для заданной точности 10^-1. Начиная с заданной точности 10^-6 фактическая погрешность становится на порядок выше заданной.

При внесении возмущений в у(а) и в оба начальных условия «в правую сторону» (по формуле (1+l)\*y, где l – возмущение в долях) метод конечных разностей дает фактическую погрешность того же порядка, что и внесенное возмущение. Начиная с возмущения порядка 10 в -5 (в долях) фактическая погрешность становится того же порядка, что и значение без возмущений, начиная с 10 в -6 с каждым шагом все больше знаков после запятой совпадают со значением без возмущений (при внесении возмущения 10 в -10 в процентах значение совпадает с реальным значением без возмущений до 6 знаков после запятой – стандартная запись числа с плавающей точкой). При внесении возмущения в у(b) «в правую сторону», метод ведет себя похоже, однако начальная точность для 1% и 0.1% дает погрешность на порядок выше, но начиная с 0.01% погрешность оказывается того же порядка вплоть до 10 в -4 (далее аналогично). При симметричном внесении возмущений (для у(а) – в правую сторону, для у(б) в левую сторону по формуле (1-л)\*у) метод ведет себя так же, за исключением случая, когда возмущение вносится только в у(б) – степени фактической погрешности оказываются во всех случаях на порядок выше, чем вносимое возмущение (до 10 в -6, далее стремятся к точному решению).  
Метод сведения к двум задачам Коши ведет себя одинаково как при симметричных изменениях, так и при изменениях «в одну сторону» (за исключением случая, когда изменения вносятся в одну сторону в оба начальных условия): фактическая погрешность оказывается на порядок выше, нежели вносимые возмущения в долях (и на порядок выше, чем дает метод конечных разностей). Начиная с возмущений 10 в -6 порядок погрешности тот же, что и в решении без возмущений, а начиная с 10 в -7 с каждым шагом все больше знаков после запятой совпадают со значением без возмущений. При внесении возмущений «в одну сторону» в оба условия метод дает тот же порядок погрешности, что и вносимое возмущение - так же, как и метод конечных разностей, однако, в отличие от него, на возмущении 10 в -6 достигается погрешность того же порядка и далее держится тот же порядок.

Можно проследить следующую закономерность: для первых 5 порядков возмущений (10 в -1 … 10 в -5) погрешность возрастает, а начиная с 6 (10 в -6) порядок погрешности остается постоянным – заданная точность для проводимых вычислений была 10 в -5 (тоже 5 порядков).

**Вывод**Метод конечных разностей проще в понимании и программировании, чем метод сведения к двум задачам Коши, однако в нем сложнее добиться высокой точности. Внесение малых возмущений в начальные условия порождают адекватные изменения в решении, то есть оба метода являются устойчивыми (Коши показывает точность на порядок выше как для исходных данных, так и для данных с возмущениями).

**Для курсача:**

Количество вызовов функции также остается постоянным для заданной точности от 10 в -1 до 10 в -5, равным 441, а затем начинает возрастать линейно.